数理解析研究所講究録
1022 巻 1997 年 1-6

Conformal and holomorphic mappings of a once-holed torus

山口大学理学部　増本　誠 (Makoto Masumoto)

境界成分を一つだけ持つ種数 1 の開リーマン面を ***once-holed torus*** と呼ぶ. 特に, torus (種数 1 の閉リーマン面) から 1 点を除いたリーマン面に等角同値なリーマン面を ***once-punctured torus*** と言う. Once-holed torus は, 把手を持つ開リーマン面のうちで位相的に最も簡単なリーマン面である. 本稿では, once-holed torus の等角写像や正則写像について知られている結果を, 二重連結な (平面型) リーマン面の場合と比較しながら, 紹介する.

1. Once-holed torus のタイヒミュラー空間

Once-holed torus R と R の標準ホモロジー基 $\chi=\{a,b\}$ の組 (R,χ) を, ***marked once-holed torus*** という. (R',χ'), $\chi'=\{a',b'\}$, を別の marked once-holed torus とし, $f:R\to R'$ を中への等角写像 (単射正則写像) とする. もし, $f(a)$, $f(b)$ がそれぞれ a', b' にホモローグならば, f は (R,χ) から (R',χ') の中への**等角写像**である, あるいは, $f:(R,\chi)\to(R',\chi')$ は**等角**である, という.

Marked once-holed torus の (等角同値類の) 全体 $\mathcal{T}$ を once-holed torus のタイヒミュラー空間と呼ぶ. 実際には, once-holed torus のうち, once-punctured torus とそうでないものの間には全射擬等角写像が存在しないから, $\mathcal{T}$ は, once-punctured torus ではない once-holed torus の (縮約) タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_0$ と once-punctured torus のタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_1$ の和集合である.

二重連結なリーマン面は, $\mathbb{C}^*:=\mathbb{C}\setminus\{0\}$ または $D_r:=\{z\in\mathbb{C}\mid 1<|z|<r\}$, $1<r\leq\infty$, のいずれかただ一つと等角同値である. 従って, $\{\mathbb{C}^*\}\cup\{D_r\}_{1<r\leq\infty}$ を二重連結リーマン面の (等角同値類の) 空間とみなすことができ, それは, $\{\mathbb{C}^*\}$, $\{D_\infty\}$, $\{D_r\}_{1<r<\infty}$ の三つのタイヒミュラー空間で構成されていることが分かる. $\mathbb{C}^*$ には双曲計量は入らないが, D_r $(1<r\leq\infty)$ には双曲計量を導入することができる. 今, 双曲的な二重連結リーマン面 D の境界成分を分離する単純閉測地線の長さを l とし, $r=e^{2\pi^2/l}$ とおくと, D は D_r と等角同値である. ゆえに, 長さ l は二重連結双曲的リーマン面の空間を区間 $[0,+\infty)$ として実現する大域座標である.

同様に, once-holed torus のタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}$ もいくつかの双曲的閉測地線の長さで記述される. (R,χ), $\chi=\{a,b\}$, を marked once-holed torus とする. ここでは, a, b を R

の基本群の元として扱う. (Once-holed torus においては, サイクルとして非自明な単純閉曲線 c_1, c_2に対して, c_1 と c_2 が互いにホモローグであることと自由にホモトピックであることとは同値である.) 一般に, R の閉曲線 c の自由ホモトピー類に属す閉曲線の双曲的長さの下限を $l_R(c)$ と表す. そして,

$$\Psi(R,\chi) = \left(2\cosh\frac{l_R(a)}{2}, 2\cosh\frac{l_R(b)}{2}, 2\cosh\frac{l_R(ab)}{2}\right)$$

とおく.

定理 1 ([1], [6]). 写像 $\Psi : \mathcal{T} \to \mathbb{R}^3$ は単射である. その値域は,

$$\Psi(\mathcal{T}) = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \xi\eta\zeta \leq 0, \xi > 2, \eta > 2, \zeta > 2\}$$

である.

$\mathcal{T}$ は二つのタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ の和集合であった. これらのタイヒミュラー空間はそれぞれ実, 複素解析的多様体であるが, Ψ のそれらへの制限はいずれもその像の上への実解析的微分同型である. そこで, $\mathcal{T}$ に, Ψ を媒介として, $\mathcal{T}_0$, $\mathcal{T}_1$ の解析的多様体の構造と両立する境界付き実解析的多様体の構造を入れることができる.

$$\Psi(\mathcal{T}_0) = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \xi\eta\zeta < 0, \xi > 2, \eta > 2, \zeta > 2\}$$
$$\Psi(\mathcal{T}_1) = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \xi\eta\zeta = 0, \xi > 2, \eta > 2, \zeta > 2\}$$

なので, $\mathcal{T}_1$ が $\mathcal{T}$ の境界である.

さて, 二重連結リーマン面 D の境界成分を分離する単純閉曲線全体の極値的長さを λ とする. D が D_r に等角同値ならば, $r = e^{2\pi/\lambda}$ が成立する. よって, 極値的長さ λ も二重連結双曲的リーマン面の空間の大域座標となる.

同様に, $\mathcal{T}$ にも極値的長さによる大域座標を導入することができる. Marked once-holed torus (R,χ), $\chi = \{a,b\}$, に対し,

$$\Phi(R,\chi) = (\lambda_R(a), \lambda_R(b), \lambda_R(a-b))$$

と定義する. ここで, 再び a, b をサイクルとして取り扱い, また, R のサイクル c に ホモローグな単純閉曲線全体の極値的長さを $\lambda_R(c)$ と表す. そして,

$$F(\xi,\eta,\zeta) = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - 2(\xi\eta + \eta\zeta + \zeta\xi)$$

とおく.

定理 2 ([12]). Φ は $\mathcal{T}$ 上の実解析的な大域座標である. その像は,

$$\Phi(\mathcal{T}) = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \mathbb{R}^3 \mid F(\xi,\eta,\zeta) + 4 \leq 0, \xi > 0, \eta > 0, \zeta > 0\}$$

である.

タイヒミュラー空間 $\mathcal{T}$ には, タイヒミュラー・モデュラー群が真性不連続に作用している. Keen [7] は, モデュラー群の一組の生成元を座標 Ψ を使って表現し, 基本領域を一つ具体的に記述した. 極値的長さによる座標 Φ を用いたモデュラー群とその基本領域の表現も知られている ([12]). 特に, モデュラー群は, 二次形式 F を不変にする 3 次正方行列全体のなすリー群の離散部分群として表現される.

2. Torus と once-holed torus の中への等角的埋め込み

一般に, 種数有限な任意の開リーマン面は, 同種数のある閉リーマン面に等角に埋め込まれる. 種数 0 の場合, 埋め込み先の閉リーマン面はリーマン球面ただ一つしかない (埋め込み方はたくさんある) が, 種数が 1 以上になると埋め込み先も複数あり得る. Heins [2] は, 与えられた種数 1 の開リーマン面を等角に埋め込ませる torus の全体は, モデュライ空間の中で有界集合をなすことを示した. Shiba [17] はこの結果を大いに精密化した. ここでは, この Shiba の定理を once-holed torus の場合に限った形で述べる. そのために, まず, marked torus にそのモデュラスを対応させることにより, marked torus の (等角同値類) 全体, すなわち, torus のタイヒミュラー空間を, 上半平面 $\mathbb{H}$ と同一視することができることに注意しよう. そして, $(R,\chi) \in \mathcal{T}$ に対し, (R,χ) を等角に埋め込ませる marked torus のモデュラス全体の集合を $M(R,\chi)$ と表す.

定理 3 ([17]). $M(R,\chi)$ は, $\mathbb{H}$ の閉円板または 1 点である. $M(R,\chi)$ が 1 点になるための必要十分条件は, $(R,\chi) \in \mathcal{T}_1$ である.

$M(R,\chi)$ の双曲的長さを用いた記述は知られていないが, 極値的長さを用いれば次のように表現される.

定理 4 ([11], [12]). $(\alpha,\beta,\gamma) = \Phi(R,\chi)$ とすると, $M(R,\chi)$ の中心と半径はそれぞれ

$$\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2\alpha} + i\frac{4-F(\alpha,\beta,\gamma)}{8\alpha}, \quad -\frac{4+F(\alpha,\beta,\gamma)}{8\alpha}$$

に等しい.

双曲的な二重連結リーマン面 D_1, D_2 の境界成分を分離する単純閉曲線族の極値的長さをそれぞれ λ_1, λ_2 とする. このとき, D_1 から D_2 の中への等角写像 f で $f(D_1)$ が D_2 の境界を分離するするようなものが存在するための必要十分条件は, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ である. この条件を双曲的長さを用いて表現することも, もちろん可能である.

Marked once-holed torus から別の marked once-holed torus の中への等角写像が存在するための条件を求めよう. 与えられた $(R,\chi) \in \mathcal{T}$ を等角に埋め込ませる marked once-holed torus の全体を $\mathfrak{M}(R,\chi)$ と表す. このとき次の定理が成立する:

定理 5 ([12]). $(\alpha,\beta,\gamma) = \Phi(R,\chi)$ とすると,

$$\Phi(\mathfrak{M}(R,\chi)) = \{(\xi,\eta,\zeta) \in \Phi(\mathcal{T}) \mid F(\alpha-\xi,\beta-\eta,\gamma-\zeta) \leq 0, F(\alpha,\beta,\gamma) \leq F(\xi,\eta,\zeta)\}$$

である.

$(R_1,\chi_1),(R_2,\chi_2)\in\mathcal{T}$ に対し, (R_1,χ_1) から (R_2,χ_2) の中への等角写像が存在するための必要十分条件は $M(R_1,\chi_1)\supset M(R_2,\chi_2)$ である ([12]). 定理 5 はこの事実を使って証明される.

3. Torus と once-holed torus の中への正則写像

Marked once-holed torus から marked torus または marked once-holed torus の中への正則写像の意味は明らかであろう. 例えば, $(R_1,\chi_1),(R_2,\chi_2)\in\mathcal{T}$, $\chi_k=\{a_k,b_k\}$ $(k=1,2)$, とするとき, (R_1,χ_1) から (R_2,χ_2) の中への正則写像とは, $f(a_1)$, $f(b_1)$ がそれぞれ a_2, b_2 にホモローグとなる正則写像 $f:R_1\to R_2$ のことである.

定理 3 が示す通り, 与えられた marked once-holed torus からの等角写像が存在する marked torus は限られている. ところが, 正則写像の場合には, 事情は全く異なる:

命題 1. $(R,\chi)\in\mathcal{T}$ とする. このとき, 任意の marked torus (T',χ') に対し, (R,χ) から (T',χ') の中への正則写像が存在する.

この命題は, Behnke-Stein の定理を使って簡単に証明される. また, Shiba [16] の特別な場合でもある. 命題 1 は, たとえ R の境界が小さくても (すなわち, $(R,\chi)\in\mathcal{T}_1$ であっても) 正しいのである.

さて, $(R,\chi)\in\mathcal{T}$ に対し, (R,χ) から (R',χ') の中への正則写像が存在するような $(R',\chi')\in\mathcal{T}$ の全体を $\mathfrak{H}(R,\chi)$ と表す. 命題 1 とは対照的に, 次の定理が成立する.

定理 6 ([13]). 任意の $(R,\chi)\in\mathcal{T}$ に対し, $\mathfrak{H}(R,\chi)$ は $\mathcal{T}$ のコンパクト部分集合である.

D_1, D_2 を二重連結双曲的リーマン面とする. D_1 から D_2 の中への正則写像で基本群間の非自明な準同型写像を誘導するものが存在すれば, D_1 から D_2 の中への等角写像で D_1 の像が D_2 の境界成分を分離するものが存在する. この事実とそれに関連する話題については, Schiffer [15], Huber [3], [4], Jenkins [5], Landau-Osserman [8], [9], Reich [14], Marden-Richards-Rodin [10] を参照せよ.

二重連結リーマン面の場合と異なり, marked once-holed torus の空間では, 正則写像の存在が必ずしも等角的埋め込みが可能であることを保証しない. すなわち, 次の定理が成立する:

定理 7 ([13]). 任意の $(R,\chi)\in\mathcal{T}_0$ に対して, $\mathfrak{M}(R,\chi)\subsetneqq\mathfrak{H}(R,\chi)$ が成り立つ.

注意. $(R,\chi)\in\mathcal{T}_1$ に対しては, $\mathfrak{M}(R,\chi)=\mathfrak{H}(R,\chi)=\{(R,\chi)\}$ が成り立っている.

4. Once-holed torus の等角写像

一般に, リーマン面 R 上の (ホモトピーの意味で) 非自明な単純閉曲線の全体を $\mathcal{S}(R)$ と表す. 各 $c\in\mathcal{S}(R)$ に対し, c の自由ホモトピー類の極値的長さを $\lambda_R(c)$ と書く. また, R が

双曲的であるとき, c の自由ホモトピー類に属す閉曲線の双曲的長さの下限を $l_R(c)$ と表す.

さて, $j: R \to R'$ を, リーマン面 R から別のリーマン面 R' の上への同相写像とする. もし, R から R' の中への等角写像で j とホモトピックなものが存在すれば,

$$\text{(a)} \qquad \lambda_R(c) \geq \lambda_{R'}(j(c)) \qquad (\forall c \in \mathcal{S}(R))$$

が成立する. さらに, R と R' がともに双曲的であれば,

$$\text{(b)} \qquad l_R(c) \geq l_{R'}(j(c)) \qquad (\forall c \in \mathcal{S}(R))$$

も成立している. すなわち, 条件 (a), (b) は, R から R' の中への等角写像で j とホモトピックなものが存在するための必要条件である.

R, R' が二重連結双曲的リーマン面である場合には, (a), (b) はいずれも j とホモトピックな等角写像が存在するための十分条件にもなっている. では, once-holed torus についてはどうだろうか.

定理 8 ([13]). R, R' を once-holed torus とし, j を R から R' の上への同相写像であるとする. このとき, すべての $c \in \mathcal{S}(R)$ に対して $\lambda_R(c) \geq \lambda_{R'}(j(c))$ が成立していれば, R から R' の中への等角写像で j とホモトピックなものが存在する.

従って, R と R' が once-holed torus である場合には, 条件 (a) は, j とホモトピックな R から R' の中への等角写像が存在するための必要十分条件である. 一方, 条件 (b) については, そのような等角写像が存在するための十分条件にはならない.

定理 9 ([13]). R は once-holed torus だが, once-punctured torus ではないとする. このとき, 次の二つの条件を同時に満足する once-holed torus R' と全射同相写像 $j: R \to R'$ が存在する:

(i) すべての $c \in \mathcal{S}(R)$ に対して $l_R(c) \geq l_{R'}(j(c))$ が成り立つ.
(ii) R から R' の中への等角写像で j とホモトピックなものは存在しない.

注意. 定理 9 は, R が種数 1 以上の開リーマン面で, 位相的には有限であるが等角的には有限でない場合にも成立する.

References

[1] R. Fricke and F. Klein, Vorlesungen über die Theorie der Automorphen Functionen II, B. G. Teubner, Leipzig–Berlin, 1912.

[2] M. Heins, A problem concerning the continuation of Riemann surfaces, in "Contributions to the Theory of Riemann Surfaces" ed. by L. V. Ahlfors et al., Ann. of Math. Stud. **30** (1953), 55–62.

[3] H. Huber, Über analytische Abbildungen von Ringgebieten in Ringgebieten, Compositio Math. **9** (1951), 161–168.

[4] H. Huber, Über analytische Abbildungen Riemannscher Flächen in sich, Comment. Math. Helv. **27** (1953), 1–73.

[5] J. A. Jenkins, Some results related to extremal length, in "Contribution to the Theory of Riemann Surfaces" ed. by L. V. Ahlfors et al., Ann. of Math. Stud. **30** (1953), 87–94.

[6] L. Keen, On Fricke moduli, in "Advances in the Theory of Riemann surfaces" ed. by L. V. Ahlfors et al., Ann. of Math. Stud. **66** (1971), 205–224.

[7] L. Keen, On fundamental domains and the Teichmüller modular group, in "Contributions to Analysis" ed. by L. V. Ahlfors et al., Academic Press, New York–London, 1974, pp.185–194.

[8] H. J. Landau and R. Osserman, Distortion theorems for multivalent mappings, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 87–91.

[9] H. J. Landau and R. Osserman, On analytic mappings of Riemann surfaces, J. Anal. Math. **7** (1959/60), 249–279.

[10] A. Marden, I. Richards and B. Rodin, Analytic self-mappings of Riemann surfaces, J. Anal. Math. **18** (1967), 197–225.

[11] M. Masumoto, On the moduli set of continuations of an open Riemann surface of genus one, J. Anal. Math. **63** (1994), 287–301.

[12] M. Masumoto, Conformal mappings of a once-holed torus, J. Anal. Math. **66** (1995), 117–136.

[13] M. Masumoto, Holomorphic and conformal mappings of open Riemann surfaces of genus one, preprint.

[14] E. Reich, Elementary proof of a theorem on conformal rigidity, Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 644–645.

[15] M. Schiffer, On the modulus of doubly-connected domains, Quart. J. Math. Oxford Ser. **17** (1946), 197–213.

[16] M. Shiba, Abel's theorem for analytic mappings of an open Riemann surface into compact Riemann surfaces of genus one, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 305–325.

[17] M. Shiba, The moduli of compact continuations of an open Riemann surface of genus one, Trans. Amer. Math. Soc. **301** (1987), 118–137.